



University of the Pacific Scholarly Commons

Euler Archive - All Works

Euler Archive

1761

De motu et reactione aquae per tubos mobiles transfluentis

Leonhard Euler

Follow this and additional works at: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works>



Part of the [Mathematics Commons](#)

Record Created:

2018-09-25

Recommended Citation

Euler, Leonhard, "De motu et reactione aquae per tubos mobiles transfluentis" (1761). *Euler Archive - All Works*. 259.
<https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/259>

This Article is brought to you for free and open access by the Euler Archive at Scholarly Commons. It has been accepted for inclusion in Euler Archive - All Works by an authorized administrator of Scholarly Commons. For more information, please contact mgibney@pacific.edu.

DE
MOTV ET REACTIONE AQVAE
PER TVBOS MOBILES
TRANSFLVENTIS.

2.

Auctore

L. EVLERO.

I.

Tab. V. **C**onsidero hic tubum figurae cuiuscunque ARF, qui
Fig. 1. circa axem fixum AC motu quocunque in gyrum
agatur, eumque aqua plenum, quae ex eius orificio F
erumpat. Quaeritur itaque primum motus, quo aqua
sit effluxura, tum vero vis reactionis, quam tubus ab
aqua transfluente quouis momento sustineat.

2. Binae hae quaestiones ita inter se sunt complicatae, ut altera sine altera resolui nequeat: si enim vim reactionis aquae in tubum definire velimus, motum aquae tanquam cognitum spectari oportet; motus autem determinatio reactionis cognitionem requirit.

3. Primum ergo motum aquae pro cognito assumam; atque ut ex eo cum motu tubi coniuncto vis reactionis determinari queat, duplices vires contemplari oportet: alteras, quibus aqua in tubo actu sollicitatur, vel ob gravitatem, vel ob alias impulsiones, quibus extrinsecus ad motum vrgetur: alteras vero, quae ad motus, quem inesse assumimus, conservationem, secundum principia mechanica, requiruntur.

4. Si

4. Si enim vires, quibus aqua actu ad motum sollicitatur, littera P complectamur, vires autem ad eius conseruationem requisitas littera Q: vires autem reactionis littera R indicentur: quoniam tubus pari vi in aquam reagit; aqua hinc sollicitabitur $vi = -R$, sicque omnino ad motum, tam extrinsecus, quam ab ipso tubo impelletur $vi = P - R$.

5. Haec ergo vis $P - R$ aequalis sit necesse est ipsi vi Q, quae ad motus insiti conseruationem per principia mechanica requiritur. Vnde cum habeamus $P - R = Q$, obtinebimus $R = P - Q$, sicque vis reactionis aequabitur viribus aquam actu extrinsecus impellentibus, demtis inde viribus ad motus conseruationem requisitis.

6. Principio hoc, cui omnis reactionis vis innitur, stabilito, inuestigationem ordiri conueniet ab indagatione virium Q, quae ad conseruationem eius motus, quem in aqua inesse assumimus, secundum principia mechanica requiruntur: inde scilicet, quod omnis motus mutatio certam virium actionem exigit.

7. Quod igitur primo ad motum tubi attinet, ponamus, elapso iam a motus initio tempore $= t$, celeritatem orificii F, qua circa axem AC gyratur, debitam esse altitudini $= u$, ita vt u sit functio quaecunque temporis iam elapsi t : vnde si distantia orificii ab axe CF ponatur $= b$, exprimet $\frac{v u}{b}$ celeritatem gyrationis tubi.

8. Deinde sit v altitudo debita celeritati, qua aqua nunc quidem ex orificio F effluit. Hic autem v non veram aquae celeritatem designat, sed eius

314 DE MOTU ET REACTIONE AQVAE

celeritatem relatiuam respectu tubi, qui ipse moueri assumitur; motus enim verus componetur ex motu hoc relatiuo et ipso tubi motu. Erit autem v etiam functio temporis t .

9. Si igitur amplitudo orificii F ponatur $=ff$, quoniam Vv est celeritas, qua aqua ex orificio effluit, temporis elemento dt aqua effluens ratione tubi conficiet spatium $=dtVv$; ideoque copia aquae hoc tempusculo ex tubo exeuntis erit $=ffdtVv$.

10. Consideretur nunc tubi punctum quodcunque R , in quo sit amplitudo tubi $=zz$, quae ergo non a tempore t , sed a loco puncti R in tubo pendeat: atque nunc quidem, ubi aqua ex orificio F $=ff$ effluere ponitur celeritate $=Vv$, celeritas aquae in R , qua in tubo secundum Rr progreditur, erit $=\frac{ffVv}{zz}$; quae cum motu gyratorio puncti R coniuncta, dabit veram celeritatem aquae in puncto R haerentis.

11. Concipiatur planum ad axem tubi AC normale per orificium F transiens, FCB , ad quod ex puncto R demittatur perpendicularis, seu axi motus AC parallela RQ , sitque curua CQF projectio tubi ARF in hoc plano facta, cuius corda CQ ponatur $=y$, quae cum exprimat distantiam puncti R ab axe AC , erit huius puncti celeritas gyratoria circa axem $=\frac{yVv}{b}$.

12. Cum nunc elapso tempore $=t$, tubus situm ARF , eiusque projectio situm CQF teneat, ponamus initio huius temporis projectionem in situ CMB fuisse, indeque tempore t per angulum $BCF = \phi$ circa axem AC esse promotam; orificium ergo F tempusculo dt proue.

prouehetur per spatium $bd\Phi$ ob $CB=CF=b$; eritque igitur $bd\Phi=dtVu$: ita vt etiam angulus Φ sit functio ipsius temporis t .

13. Referamus curuam CMB ad rectam CB tanquam axem, sitque M punctum ipsi Q analogum, ideoque $CM=CQ=y$; ac ponatur angulus $MCL=QCP=\theta$, qui erit functio ipsius y , non a tempore t pendens; vnde ducta ML ad CB normali, habebitur $CL=y\cos.\theta$, et $LM=y\sin.\theta$

14. Initio ergo temporis t situs puncti R, quod tum puncto M imminabat, his formulis definitur, vnde si eius altitudo supra planum BCF, scilicet perpendicularum RQ, ponatur $=r$, quod perpetuo idem manet, etiam r tanquam functio ipsius y spectari debet, sicque ex natura functionum θ et r figura tubi determinatur.

15. Cum autem elapso tempore t , punctum M ob motum gyratorium translatus sit in Q, erit angulus $MCQ=BCF=\Phi$, ideoque angulus $BCQ=\theta+\Phi$: vnde si ex Q ad rectam fixam CB ducatur perpendicularis QX, erit $CX=y\cos(\theta+\Phi)$ et $XQ=y\sin(\theta+\Phi)$.

16. Situm ergo puncti R ternis coordinatis, rectis fixis CB, CD et CA inter se normalibus, parallelis definitum habemus, quae sint: $CX=y\cos(\theta+\Phi)=X$; $XQ=y\sin(\theta+\Phi)=Y$ et $QR=r$, quarum illae duae tantum ab angulo Φ cum tempore variabili pendent; dum postrema a sola variabili y pendet.

17. Progrediatur aquae particula nunc in R haerens tempusculo dt per spatium Rr in tubo, dum

R r 2

tubus

316 DE MOTU ET REACTIONE AQUAE

tubus ipse quoque motu angulari circa axem AC gy-
ratur: situs ergo sequens huius aquae particulae. superio-
ribus formulis indicabitur, si tam γ , quam Φ , pro varia-
bilibus assumantur, scilicet $X + dX$; $Y + dY$ et $r + dr$
erunt coordinatae pro hoc situ.

18. Denotet m massam particulae nunc in R
haerentis, et cum eius motus a variabilitate coordina-
rum X , Y et r pendeat, si tam γ quam tempus t pro
variabili capiatur; tribus opus erit viribus ad motum
huius particulae moderandum, quae secundum ternos axes
CB, CD et CA erunt directae.

19. Ac secundum principia mechanica, quidem,
si elementum temporis dt capiatur constans, tres istae
vires ita se habebunt.

I. Vis secundum directionem CA agens $= \frac{2mddr}{dt^2}$

II. Vis secundum directionem CB agens $= \frac{2mddX}{dt^2}$

III. Vis secundum directionem CD agens $= \frac{2mddY}{dt^2}$

20. Motus etiam verus particulae istius aquae se-
cundum easdem directiones resolutus, producet triplicem
celeritatem:

I. Celeritatem secundum directionem CA $= \frac{dr}{dt}$

II. Celeritatem secundum directionem CB $= \frac{dX}{dt}$

III. Celeritatem secundum directionem CD $= \frac{dY}{dt}$

21. Ponamus autem elementum tubi $Rr = ds$,
quod est spatium a particula aquae m tempusculo in
tubo percursum; quia ergo celeritas huius particulae in
tubo est $= \frac{ff\gamma v}{zz}$, erit $ds = \frac{ffdt\gamma v}{zz}$, seu $zzds = ffdt\gamma v$.
Est vero etiam, uti vidimus, $hd\Phi = dt\gamma v$.

At

At differentiale ds a figura tubi pendet, ideoque per relationem inter y , θ et r definitur:

22. Cum igitur sit $X = y \cos.(\theta + \Phi)$ et $Y = y \sin.(\theta + \Phi)$, erit differentiando:

$$dX = dy \cos.(\theta + \Phi) - y(d\theta + d\Phi) \sin.(\theta + \Phi)$$

$$dY = dy \sin.(\theta + \Phi) + y(d\theta + d\Phi) \cos.(\theta + \Phi)$$

2c denuo differentiando:

$$ddX = ddy \cos.(\theta + \Phi) - 2dy(d\theta + d\Phi) \sin.(\theta + \Phi)$$

$$- y(d\theta + d\Phi)^2 \cos.(\theta + \Phi) - y(dd\theta + dd\Phi) \sin.(\theta + \Phi)$$

$$ddY = ddy \sin.(\theta + \Phi) + 2dy(d\theta + d\Phi) \cos.(\theta + \Phi)$$

$$+ y(d\theta + d\Phi)^2 \sin.(\theta + \Phi) + y(dd\theta + dd\Phi) \cos.(\theta + \Phi)$$

23. Quodsi ergo hi valores in formulis superioribus substituuntur, habebuntur tam celeritates veras particulae aquae m , quam vires ad eius motum secundum ternas directiones CA, CB, et CD requisitae. Quoniam autem hic motus rotatorius spectatur, non tam istas vires ipsas, quam earum momenta respectu axis CA sunt quaerenda, ut inde vis aquae, qua motus tubi gyratorius afficitur, definiatur.

24. Vis igitur secundum directionem CA nullo modo rotationem afficit, ex vi secundum CB autem puncto R applicata nascitur momentum $= \frac{2m d d X}{dt^2}$, $y \sin.(\theta + \Phi)$, at ex vi secundum CD momentum $= \frac{2m d d Y}{dt^2}$, $y \cos.(\theta + \Phi)$; quorum illud in plagam FD, hoc vero in plagam oppositam BE tendit, sicque cum motus directione conveniet.

25. Momentum ergo ex his viribus coniunctum, et in plagam BE tendens, erit $= \frac{2m y}{dt^2} (ddY \cos.(\theta + \Phi) - ddX \sin.(\theta + \Phi))$

R r 3

($\theta + \Phi$)

$(\theta + \Phi) - ddX \sin.(\theta + \Phi)$, quod substitutis valoribus superioribus abit in hanc formam:

$$\frac{2m}{dt^2} (2dy(d\theta + d\Phi) + y(dd\theta + dd\Phi))$$

siue $\frac{2m}{dt^2} d.yy(d\theta + d\Phi) = \frac{2m}{dt} d.\frac{yy(d\theta + d\Phi)}{dt}$.

in qua postrema formula nullius differentialis pro constanti assumti ratio habetur.

26. Ponamus iam particulam aquae m totum tubi elementum Rr implere, cuius capacitas est $= zz ds$; quo valore pro m substituto, ad elementi Rr motum requiritur vis, cuius momentum in plagam BF tendens sit $= \frac{2m}{dt} d.\frac{yy(d\theta + d\Phi)}{dt}$; cum autem sit $zzds = \iint dt \sqrt{v}$ et $b d\Phi = dt \sqrt{u}$, erit hoc momentum:

$$2 \iint \sqrt{v} . d.\left(\frac{\iint yy d\theta}{zz ds} \sqrt{v} + \frac{yy \sqrt{u}}{b}\right) \text{ et differentiatione absoluta}$$

$$\iint d\sqrt{v} . \frac{\iint yy d\theta}{zz ds} + 2 \iint \sqrt{v} . d.\frac{\iint yy d\theta}{zz ds} + \frac{\iint yy du \sqrt{v}}{b \sqrt{u}} + \frac{\iint yy dy \sqrt{vu}}{b}.$$

27. Hinc integrando colligi poterit, quantum momentum virium ad motum aquae in tubi portione AR contentae requiratur, quia autem haec integratio praesens temporis punctum spectat, tempus t eiusque functiones tanquam quantitates constantes sunt considerandae, solaeque eae, quae a variabilitate puncti R in tubo pendent, variabilium locum obtinebunt.

28. Quantitates ergo constantes in hac integratione primum erunt v et u , et quia functiones sunt temporis t , eodem quoque pertinebunt earum differentiales $\frac{dv}{dt}$ et $\frac{du}{dt}$; quodsi ergo hoc modo has quantitates pro constantibus habendas a variabilibus separemus, prodibit momentum illud ita expressum:

$$\frac{\iint dv}{dt \sqrt{v}} . yy d\theta + 2 \iint \sqrt{v} . d.\frac{\iint yy d\theta}{zz ds} + \frac{du}{dt \sqrt{u}} . \frac{yy zz ds}{b} + \frac{du}{b} \iint yy dy.$$

29. In-

29. Integratione ergo instituta, aqua AR vires requirit ad suum motum, quarum momentum in plagam BF tendens erit:

Const. $+ \frac{ffdv}{dt\sqrt{u}} \int yy d\theta + \frac{du}{bd\sqrt{u}} \int y y z z ds + 2f^+v \cdot \frac{yy d\theta}{zz ds} + \frac{2\sqrt{vu}}{b} \int yy$
vbi constans per integrationem ingressa ex termino aquae altero definiri debet, ita vt, si punctum R in tubo ibi capiatur, vbi aqua incipit, hoc momentum euanescat.

30. Extendatur hoc integrale per totum tubum, fiatque pro toto tubo: $\int yy d\theta = M$, et $\int y y z z ds = N$; et quia tum fit $y = b$; $zz = ff$; erit momentum pro omni aqua in tubo contenta requisitum:

Const. $+ \frac{ffdv}{dt\sqrt{u}} \cdot M + \frac{du}{bd\sqrt{u}} \cdot N + 2ffv \cdot \frac{b d\theta}{ds} + 2bff\sqrt{vu}$
vbi valor fractionis $\frac{b d\theta}{ds}$ ex directione orificii F, secundum quam aqua erumpit, respectu arcus BF definiri debet. Exprimit autem $\frac{b d\theta}{ds}$ cosinum anguli, quem vena aquae Ffe tubo exiens cum directione motus puncti F constituit.

31. In genere enim fractio $\frac{y d\theta}{ds}$ exprimit cosinum anguli, quem directio motus aquae in tubi puncto R, seu elemento Rr, cum directione motus ipsius puncti R, quo ob motum gyratorium mouetur, facit. Quare si hic angulus rRS , denotante RS directionem motus puncti R, ponatur $= \omega$, qui in orificio F abeat in α , erit $\frac{y d\theta}{ds} = \cos. \omega$, et pro orificio $\frac{b d\theta}{ds} = \cos. \alpha$.

32. Hinc pro aqua, portionem tubi AR occupante, habebitur momentum virium, in directionem BF, seu RS, tendens, hoc:

$$\text{Const.} + \frac{ffdv}{dt\sqrt{u}} \int y d s \cos. \omega + \frac{du}{bd\sqrt{u}} \int y y z z ds + 2f^+v \cdot \frac{y \cos. \omega}{zz} + \frac{2\sqrt{vu}}{b} \int yy$$

ac

320 DE MOTU ET REACTIONE AQUAE

ac posito pro omni aqua in tubo contenta :

$$\int y ds \cos \omega = M \text{ et } \int y y z z ds = N$$

erit momentum virium omni aquae conueniens :

$$\text{Const.} + \frac{ffdv}{dtyv} \cdot M + \frac{du}{bdtyu} \cdot N + 2bff(v \cos \alpha + Vvu)$$

33. Si suprema aqua in tubo haereat in E, sitque huius puncti ab axe rotationis AC distantia = c, integralia $\int y ds \cos \omega$ et $\int y y z z ds$ ita capi debent, vt euanescant puncto R in E translato. Ac si amplitudo tubi in E sit = ee; ibique angulus ω abeat in ε , fiet constans illa = $-2f^2v \frac{c \cos \varepsilon}{ee} - \frac{2\sqrt{vu}}{b} \cdot c cff = -2cff(\frac{ffv \cos \varepsilon}{ee} + \frac{c\sqrt{vu}}{b})$ unde momentum virium, toti aquae conueniens, erit

$$\frac{ffdv}{dtyv} M + \frac{du}{bdtyu} N + 2bff(v \cos \alpha + Vvu) - 2cff(\frac{ffv \cos \varepsilon}{ee} + \frac{c\sqrt{vu}}{b})$$

34. Cum igitur hoc momentum ex illis viribus, quas supra sub littera Q sumus complexi, oriatur, sit S momentum ex viribus aquam actu extrinsecus sollicitantibus P natum, et in eandem plagam BF vergens, atque ex reactione aquae resultabit virium momentum, ad motum tubi rotatorium accelerandum tendens,

$$S - \frac{ffdv}{dtyv} M - \frac{du}{bdtyu} N - 2bff(v \cos \alpha + Vvu) + 2cff(\frac{ffv \cos \varepsilon}{ee} + \frac{c\sqrt{vu}}{b})$$

in quo effectus reactionis consumitur.

35. Videmus ergo effectum reactionis non solum ab vtraque celeritate ipsa Vv et Vu pendere, sed etiam ab vtriusque variabilitate, siue acceleratione, siue retardatione. Tum vero litterae M et N figuram et amplitudinem totius tubi inuoluunt, reliqui termini autem tantum a summitate aquae E et orificio F pendent, unde si vterque motus fuerit vniformis figura
tubi

tubi nihil confert ad vim reactionis, tum enim, ob $dv=0$ et $du=0$, litterae M et N ex calculo evanescent.

36. Vi ergo reactionis aquae in tubum definita, progrediamur ad ipsum aquae motum per tubum investigandum: ac primo quidem vires, quibus quamvis aquae particulam in tubo ob motum, quem inesse assumimus, sollicitari debere inuenimus, accuratius evolui opus est. Posita autem particulae aquae in R haerentis massa $=m$, ternae vires, quibus sollicitatur, sunt: I. Secundum CB $= \frac{2m ddx}{dt^2}$; II. sec. CD $= \frac{2m ddy}{dt^2}$; III. sec. CA $= \frac{2m ddr}{dt^2}$. Tab. V. Fig. 2.

37. Binas vires priores resoluamus secundum directiones QS et QT, quarum illa in directum iacet cum CQ, haec vero ad QS est normalis. Iam, ob angulum BCQ $=\theta + \Phi$, erit vis QS $= \frac{2m}{dt^2} (ddX \cos. (\theta + \Phi) + ddy \sin. (\theta + \Phi))$ et vis QT $= \frac{2m}{dt^2} (ddy \cos. \theta + \Phi - ddX \sin. (\theta + \Phi))$; valoribus ergo pro ddX et ddy inuentis substitutis, hae vires prodibunt:

$$\text{I. Vis QS} = \frac{2m}{dt^2} (ddy - y(d\theta + d\Phi)^2)$$

$$\text{II. Vis QT} = \frac{2m}{dt^2} (2dy(d\theta + d\Phi) + y(dd\theta + dd\Phi)).$$

38. Particula igitur aquae m in R iam cum ab his duabus viribus, tum a tertia secundum CA $= \frac{2m ddr}{dt^2}$ sollicitari debet: quas vires porro secundum directionem tubi Rr, aliasque duas directiones ad tubum normales resolui conuenit. Ducta autem Cq, erit $tq=dy$ et $Qt=-y d\theta$, vnde fit $\sin. SQq = \frac{y d\theta}{Cq}$ et $\cos. SQq = \frac{dy}{Cq}$. Ducatur recta QN in plano BCF ad elementum Qq normalis; erit

Tom. VI Nou. Com.

S s

Vis

322 DE MOTU ET REACTIONE AQUAE

$$\text{Vis } Qq = \text{vis } QS \cdot \cos. SQq - \text{vis } QT \cdot \sin. SQq$$

$$\text{Vis } QN = \text{vis } QS \cdot \sin. SQq + \text{vis } QT \cdot \cos. SQq$$

39. Vires ergo secundum has duas directiones Qq et QN ex viribus superioribus QS et QT ortae erunt :

$$\text{I. Vis } Qq = \frac{2m}{Qq \cdot dt^2} (dyddy - ydy(d\theta + d\Phi)^2 + 2ydyd\theta(d\theta + d\Phi) + yyd\theta(2d\theta + dd\Phi))$$

$$\text{II. Vis } QN = \frac{2m}{Qq \cdot dt^2} (-yadddy + yyd\theta(d\theta + d\Phi)^2 + 2dy^2(d\theta + d\Phi) + ydy(2d\theta + dd\Phi))$$

ac prior quidem abit in hanc :

$$\text{I. Vis } Qq = \frac{2m}{Qq \cdot dt^2} (dyddy + ydy(d\theta^2 - d\Phi^2) + yyd\theta(dd\theta + dd\Phi))$$

40. Cum vis posterior QN iam fit ad directionem tubi quoque Rr normalis, ea relinquatur; ad ducta Rs elemento projectionis Qq parallela erit $rs = dr$, et particula aquae in R ulterius vrgetur a viribus $Rs = vi Qq$ et $sr = \frac{2mddr}{dt^2}$. Hinc ducta rv ad Rr in plano Rq normali obtinebitur :

$$\text{Vis } Rr = \frac{2m}{ds \cdot dt^2} (dyddy + ydy(d\theta^2 - d\Phi^2) + yyd\theta(dd\theta + dd\Phi)) + \frac{2mddr \cdot dr}{ds \cdot dt^2}$$

$$\text{Vis } rv = \frac{2mddr}{Qq \cdot ds \cdot dt^2} (dyddy + ydy(d\theta^2 - d\Phi^2) + yyd\theta(dd\theta + dd\Phi)) - \frac{2mQq \cdot dr}{ds \cdot dt^2}$$

$$41. \text{ Est autem } Qq = V(dy^2 + yyd\theta^2) \text{ et}$$

$$Rr = ds = V(dy^2 + yyd\theta^2 + dr^2);$$

$$\text{vnde fit } dr^2 = ds^2 - dy^2 - yyd\theta^2 \text{ et}$$

$$drddr = dsdds - dyddy - ydyd\theta^2 - yyd\theta dd\theta$$

quo valore substituto, habebitur vis secundum directionem tubi;

$$\text{Vis } Rr = \frac{2m}{ds \cdot dt^2} (dsdds - ydyd\theta^2 + yyd\theta dd\theta)$$

quae,

quae, vt a confideratione differentialis constantis dt liberetur, in hanc formam transit:

$$\text{Vis } Rr = \frac{2m}{dt} \left(d \cdot \frac{ds}{dt} - \frac{y dy d\Phi^2}{ds dt} + \frac{y y d\Phi}{ds} d \cdot \frac{d\Phi}{dt} \right)$$

42. Cum vis per massam, in quam agit, diuisa praebeat accelerationem, erit acceleratio aquae in R secundum directionem tubi tempusculo dt producta

$$= \frac{2}{dt} d \cdot \frac{ds}{dt} - \frac{2y dy d\Phi^2}{ds dt^2} + \frac{2y y d\Phi}{ds dt} d \cdot \frac{d\Phi}{dt}$$

Haec scilicet acceleratio requiritur ad motum aquae eum producendum, quem ei inesse assumimus, vna cum motu ipsius tubi.

43. Haec igitur acceleratio aequalis esse debet ei, quae aquae in R versanti actu inducitur; ac primo quidem haec aqua sollicitatur a pressione aquae. Ponamus ergo, aquam in R in pari statu compressionis versari, ac si ipsi incumberet columna aquea altitudinis $= p$. in r igitur status compressionis exprimitur altitudine $p + dp$, vnde acceleratio oriatur $= \frac{-dp}{ds}$.

44. Praeterea autem aqua in R haerens a propria grauitate vrgetur. Quodsi ergo axem CA hori-
zonti verticaliter insistentem assumamus, a grauitate oriatur acceleratio secundum directionem tubi Rr , quae est $= \frac{dr}{ds}$; vtraque scilicet haec acceleratio absoluitur tempusculo dt , quo elementum $Rr = ds$ confici assumimus.

45. Cum igitur acceleratio ante inuenta aequalis esse debeat accelerationi, quae aquae in R actu inducitur, et quae est $\frac{-dp}{ds} - \frac{dr}{ds}$, vtrinque per ds multiplicando habebimus hanc aequationem:

S s 2

$-dp$

324 DE MOTU ET REACTIONE AQUAE

$$-dp - dr = \frac{zds}{dt} d \frac{ds}{dt} - \frac{zydyd\Phi^2}{dt^2} + \frac{zyydy}{dt} d \frac{d\Phi}{dt}$$

siue:

$$-dp = dr + d \frac{ds^2}{dt^2} - \frac{zydyd\Phi^2}{dt^2} + \frac{zyydy}{dt} d \frac{d\Phi}{dt}$$

46. Est autem $\frac{ds}{dt} = \frac{ffvv}{zz}$ et $\frac{d\Phi}{dt} = \frac{vu}{b}$, unde, ob $dt = \frac{zzds}{ffvv}$, sequentem obtinebimus aequationem, qua status compressionis aquae in singulis tubi punctis determinatur:

$$-dp = dr + d \frac{f^4v}{z^4} - \frac{zydy}{bb} + \frac{zffyyddfv}{zzds} d \frac{vu}{b}$$

siue:

$$dp = -dr - d \frac{f^4v}{z^4} + \frac{zydy}{bb} - \frac{ffyyddfv}{bzzds} d \frac{vu}{b}$$

atque differentiali ipsius $\frac{f^4v}{z^4}$ euoluto, erit:

$$dp = -dr - \frac{f^4dv}{z^4} + \frac{f^4vdz}{z^5} + \frac{zydy}{bb} - \frac{ffyyddfv}{bzzds} d \frac{vu}{b}$$

47. Quodsi iam hinc statum pressionis, qui nunc in tubo locum habet, determinare velimus, tempus t et quantitates inde pendentes v , u , una cum $\frac{dv}{dt}$ et $\frac{du}{dt}$ pro constantibus habere debemus: unde, quantitatibus variabilibus a constantibus separatis, habebimus:

$$dp = -dr - \frac{ffdv}{dtvu} \cdot \frac{ds}{zz} + 4f^4v \cdot \frac{dz}{z^5} + \frac{zy}{bb} dy - \frac{du}{bdtvu} \cdot y y d\theta$$

48. Haec iam aequatio integrata dabit statum pressionis aquae in loco tubi R, qui nunc locum habet:

$$p = C - r - \frac{ffdv}{dtvu} \int \frac{ds}{zz} - \frac{f^4v}{z^4} + \frac{zyy}{bb} - \frac{du}{bdtvu} \int y y d\theta$$

Tab. V. Ac si, vt ante, w denotet angulum, quem directio motus aquae in tubo R, cum directione motus ipsius puncti R facit, seu angulum r R S, ob $y d\theta = ds \cos. w$, habebimus:

$$p = C - r - \frac{f^4v}{z^4} + \frac{zyy}{bb} - \frac{ffdv}{dtvu} \int \frac{ds}{zz} - \frac{du}{bdtvu} \int y y ds \cos. w$$

49. Cum, integratione per totum tubum, qua aqua est repletus, peracta, iam supra posuerimus $\int y y ds \cos. w = M$, sit

fit quoque nunc $\int \frac{ds}{zz} = L$, et quia puncto R in F trans-
lato fit $r=0$ $zz=ff$ et $y=b$, erit status pressio-
nis in ipso orificio $= C - v + u - \frac{ffdv}{dt\sqrt{v}} \cdot L - \frac{du}{bdt\sqrt{u}} \cdot M$; qui
cum debeat esse nullus, habebimus. valorem constantis

$$C = v - u + \frac{ffdv}{dt\sqrt{v}} \cdot L + \frac{du}{bdt\sqrt{u}} \cdot M$$

50. Hinc ergo status compressionis in loco quo-
cunque tubi R erit

$p = v(1 - \frac{f^2}{z^2}) - u(1 - \frac{y^2}{b^2}) - r + \frac{ffdv}{dt\sqrt{v}} \cdot L - \int \frac{ds}{zz} + \frac{du}{bdt\sqrt{u}} (M - \int y ds \cos w)$
Hinc ergo in suprema aquae superficie E, vbi fit $y=c$;
 $zz=cc$ et integralia $\int \frac{ds}{zz} = 0$; $\int y ds \cos w = 0$; si ele-
vatio puncti E supra basin horizontalem BCF seu su-
pra orificium F ponatur $= a$, erit status pressio-
nis in summitate aquae E =

$$v(1 - \frac{f^2}{c^2}) - u(1 - \frac{cc}{b^2}) - a + \frac{ffdv}{dt\sqrt{v}} \cdot L + \frac{du}{bdt\sqrt{u}} \cdot M$$

51. Si igitur aqua in E. a nulla vi vrgeatur,
pressio ibi pariter in nihilum abire debet, unde habebi-
tur haec aequatio:

$$v(1 - \frac{f^2}{c^2}) - u(1 - \frac{cc}{b^2}) - a + \frac{ffdv}{dt\sqrt{v}} \cdot L + \frac{du}{bdt\sqrt{u}} \cdot M = 0$$

ex qua ipse aquae motus in tubo ad quodvis tempus
definiri poterit? si quidem motus gyratorius tubi fuerit
cognitus. Cum enim L et M sint quantitates constan-
tes, duae tantum variables insunt in hac aequatione:
 v et t , quia u est functio ipsius t .

52. Assumimus autem hic tubum constanter ad
idem punctum E. usque aqua repletum conservari, quod
continuo novam aquam affundendo fieri concipiendum
est. Verum, ut calculus subsistere possit, necesse est, ut

326 DE MOTU ET REACTIONE AQUAE

aqua affusa perpetuo eadem celeritate accedat, qua aqua in E quouis momento iam actu mouetur.

53. Ponamus ipsum tubum motu vniformi circa axem verticalem CA in gyrum agi, ita vt u fit quantitas constans, ac plerumque mox aqua e foramine F motu vniformi erumpet. Quod igitur cum euenit, habebitur haec aequatio:

$$v = \frac{a + u(1 - \frac{ce}{bb})}{1 - \frac{f^2}{e^2}}$$

ex qua, quanta celeritate tum aqua e tubo sit eruptura, patet.

54. Hoc autem aquae statu, cum aqua a nullis aliis viribus praeter grauitatem extrinsecus sollicitetur, ex grauitate autem nullum momentum, respectu axis CA oriatur, erit $S=0$, et momentum, ex reactione aquae, pro tubo in plagam BF conuertendo, natum, erit ob $dv=0$ et $du=0$ ex §. 54.

$$= 2bff(v \cos \alpha + Vvu) + 2cff(\frac{ffv \cos \alpha}{ee} + \frac{cnvu}{b})$$

55. At hoc casu suprema aquae superficies in E horizontalis erit, eiusque prima motus directio verticalis; vnde ε fit angulus rectus; et designante α angulum, quem vena aquae erumpens Ff cum directione motus ipsius orificii F constituit, erit istud momentum reactionis

$$= 2bff(v \cos \alpha + Vvu) + \frac{2cffv^2}{b} = 2bff((\frac{ce}{bb} - 1)Vvu - v \cos \alpha)$$

56. Hoc ergo momentum ad tubum in plagam BF circumagendum erit fortissimum, si angulus α fiat 180° , seu si vena aquae erumpentis Ff directe retrorsum

sum vergat secundum tangentem circuli FB: hoc itaque casu ob $\cos. \alpha = -1$, hoc momentum erit $= 2b\dot{f}$ $(v + \frac{c}{b} - 1)\sqrt{vu}$. estque vti vidimus

$$v = \frac{a + u(1 - \frac{c}{b})}{1 - \frac{f^2}{c^2}}$$

57. Notandum autem est, esse debere $\dot{f} < c$, seu orificium tubi in F minus eius amplitudine supremam in E; alioquin enim motus aquae effluentis nunquam ad uniformitatem redigeretur, sed motu continuo accelerato exiret, si quidem, vti assumimus, iugiter supra in E sufficiens aquae copia, et quidem motu convenienti, affundatur.

58. Sit igitur $\dot{f} < c$, et ponatur $1 - \frac{f^2}{c^2} = \mu$ atque $1 - \frac{c}{b} = \nu$, ita vt sit μ numerus unitate minor, eritque $v = \frac{a + \nu u}{\mu}$, et momentum ex reactione aquae natum

$$= 2b\dot{f}(\frac{a + \nu u}{\mu} - \nu\sqrt{u(a + \nu u)})$$

Quodsi ergo summitas aquae E in ipso axe AC reperiatur, vt sit $c = 0$, erit $\nu = 1$, ac si amplitudo in E multis vicibus maior sit, quam amplitudo foraminis \dot{f} , erit satis prope $\mu = 1$.

59. Quoniam aqua in E subsidit in tubo celeritate $= \frac{\dot{f}\sqrt{v}}{c}$, simulque cum tubo circa axem AC in gyrum agitur celeritate $= \frac{c\sqrt{u}}{b}$; eius vera celeritas debita erit altitudini $= \frac{f^2 v}{c^2} + \frac{c^2 u}{b^2} = (1 - \mu)v + (1 - \nu)u$ hoc est, pro v substituto valore $\frac{a + \nu u}{\mu}$, altitudini $= \frac{(1 - \mu)a}{\mu} + \frac{(\mu + \nu - 2\mu\nu)u}{\mu}$. Necessè ergo est, vt aqua in

328 DE MOTU ET REACTIONE AQVAE

in tubum continuo infundenda ex tanta altitudine fit delapsa.

60. Si g fit altitudo, ex qua graue vno minuto secundo delabitur, erit quantitas aquae, quae singulis minutis secundis per orificium F effluit, $= 2ff\sqrt{gu}$
 $= 2ff\sqrt{\frac{g(a+vu)}{\mu}}$. Quae quantitas si dicatur $= D$, erit
 $2ff = \frac{D\sqrt{\mu}}{\sqrt{g(a+vu)}}$; ideoque momentum reactionis prodibit:
 $= \frac{D}{\sqrt{g}} \left(\sqrt{\frac{g(a+vu)}{\mu}} - \sqrt{gu} \right)$.

61. Si ponamus tubum EF motu suo gyatorio absolueret circa axem CA , m reuolutiones singulis minutis secundis, quia punctum F vno minuto secundo conficit spatium $= 2\sqrt{gu}$, circuli que ab eo descripti periphæria est $2\pi b$, erit $m = \frac{\sqrt{gu}}{\pi b}$; ideoque $mb = \frac{\sqrt{gu}}{\pi}$, quo valore loco b substituto, erit momentum ex reactione aquae ortum:

$$\frac{D}{\pi m} \left(\sqrt{\frac{g(a+vu)}{\mu}} - \sqrt{gu} \right)$$

62. Hoc ergo momentum valebit resistantiam quandam, quae motui tubi reluctatur, superare. Ponamus ergo, momentum huius resistantiae esse $= Fk$, eamque ita cum tubo esse connexam, vt singulis minutis secundis circa suum peculiarem axem conficiat n reuolutiones, erit Fk per n multiplicatum aequale momento reactionis aquae per numerum m multiplicato: sicque habebitur

$$nFk = \frac{D}{\pi} \left(\sqrt{\frac{g(a+vu)}{\mu}} - \sqrt{gu} \right) \text{ siue}$$

$$2\pi nFk = 2D \left(\sqrt{\frac{g(a+vu)}{\mu}} - \sqrt{gu} \right)$$

63. Quem-

63. Quemadmodum ex copia aquae singulis minutis secundis affluentis D , quantitas orificii F ita determinatur, vt fit:

$$ff = \frac{D \sqrt{\mu}}{2 \sqrt{g(a + \gamma u)}}; \text{ ita ob } \frac{f^2}{c^2} = 1 - \mu, \text{ erit } cc = \frac{D \sqrt{\mu}}{2 \sqrt{(1 - \mu)g(a + \gamma u)}};$$

Deinde quia est $b = \frac{\sqrt{g} u}{\pi m}$, et $c = b \sqrt{1 - \gamma}$, erit $c = \frac{\sqrt{(1 - \gamma)g} u}{\pi m}$.

64. Cum deinde aqua, quae supra iugiter in tubum affunditur, delapsa esse debeat ex altitudine $= \frac{a}{\mu} - a + (1 - 2\gamma)u + \frac{\gamma u}{\mu}$; suprema aquae superficies, vnde aqua in tubum affluit, supra orificium F eleuata erit ad altitudinem $= \frac{a}{\mu} + (1 - 2\gamma)u + \frac{\gamma u}{\mu}$: quae altitudo si dicatur $= b$ erit $\frac{a}{\mu} = b - (1 - 2\gamma)u - \frac{\gamma u}{\mu}$, atque b exprimit lapsum totum aquae, quae ad hoc negotium adhiberi potest.

65. Introducta igitur hac tota lapsus altitudine b habebimus inter resistentiam Fk et reactionem aquae hanc aequationem:

$$2 \pi n F k = 2 D (\sqrt{u} (b - (1 - 2\gamma)u) - \gamma u);$$

vbi $2 \pi n F k$ designat effectum totum, qui a vi reactionis aquae produci potest.

66. Patet ergo, hunc effectum a numero γ ita pendere, vt in certo casu is fiat maximus, id quod eueniet, si capiatur $\gamma = 1 - \frac{b}{2u}$, vnde fit $b - (1 - 2\gamma)u = a$; atque maximus effectus prodit:

$$2 \pi n F k = 2 D (1 - \gamma)u = D b,$$

ita vt maximus effectus ipsi producto $D b$ sit aequalis, quod scilicet oritur, si dispendium aquae D per totam altitudinem b multiplicetur.

67. Posito autem $\nu = 1 - \frac{b}{2u}$, fit $\frac{a}{\mu} = u - \frac{\nu u}{\mu} = u - \frac{u}{\mu}$
 $+\frac{b}{2\mu}$ ideoque $a = \frac{1}{2}b - (1 - \mu)u$; ita ut hoc casu al-
titudo tubi a minor esse debeat semisse totius altitudi-
nis lapsus b ob $\mu < 1$. Porro erit $\frac{cc}{bb} = \frac{b}{2u}$; et $b = \frac{\sqrt{gu}}{\pi m}$;
atque $c = \frac{\sqrt{\frac{1}{2}gb}}{\pi m}$. Ac denique $ff = \frac{D}{2\sqrt{gu}}$ et $ee = \frac{ff}{\sqrt{1-\mu}}$
 $= \frac{D}{2\sqrt{(1-\mu)gu}}$, quae sunt determinationes, ut vis reactio-
nis maximum effectum consequatur.

68. Cum tota altitudo lapsus sit $= b$, altitudo
autem tubi $= a$, erit $b - a$ altitudo vasis, ex quo aqua
continuo in tubum influit. Quia autem aqua ex hoc
vase non perpendiculariter in tubum cadere debet,
quaeri necesse est angulum obliquitatis, sub quo aqua
in tubum est dirigenda.

Tab. V. 69. Sit igitur ABCD vas, ex quo aqua per tu-
Fig. 3. bum inclinatum CE in tubum mobilem deriuatur; ac
primo altitudo huius vasis AC cum altitudine tubi affixi
CH, seu AH, aequari debet ipsi $b - a$. Tum quia ce-
leritas aquae in E exeuntis verticalis est ad celeritatem
horizontalem, ut CH ad HE, debet esse CH:HE
 $= \frac{ff\sqrt{v}}{ee} : \frac{c\sqrt{u}}{b} = \sqrt{(1-\mu)\nu} : \sqrt{(1-\nu)u}$, hoc est CH:HE
 $= \sqrt{\frac{(1-\mu)(a+\nu u)}{\mu}} : \sqrt{(1-\nu)u} = \sqrt{(1-\mu)(b-u+\frac{1}{2}\nu u)} : \sqrt{(1-\nu)u}$.

70. Vel si altitudo a pro cognita assumatur, ob
 $u = \frac{\mu b - a}{\mu + \nu - 2\mu\nu}$ erit $\frac{a+\nu u}{\mu} = \frac{\nu b + a - 2\nu a}{\mu + \nu - 2\mu\nu}$; ideoque ratio
ista abibit in hanc: CH:HE $= \sqrt{(1-\mu)(\nu b + a - 2\nu a)} : \sqrt{(1-\nu)(\mu b - a)}$. Casu autem maximi effectus, quo
 $\nu = 1$

$$v = 1 - \frac{b}{2u}, \text{ et } u = \frac{\frac{1}{2}b - a}{1 - \mu}, \text{ erit } v = \frac{\mu b - \frac{1}{2}a}{b - 2a} \text{ et } 1 - v = \frac{(1 - \mu)b}{b - 2a}.$$

vnde fit :

$$CH : HE = V(1 - \mu)(\mu b - a) : V \frac{(1 - \mu)b}{b - 2a}(\mu b - a)$$

$$\text{feu } CH : HE = V(b - 2a) : Vb = V(1 - \frac{2a}{b}) : 1.$$

71. Quantitas orificii C inde determinatur, quod tantum inde aquae effluere debet, quantum ex tubo mobili effunditur; vnde si amplitudo huius orificii ponatur $= ii$, erit $iiV(b - a) = ffVv$, feu

$$ii = ffV \frac{v}{\mu(b - a)} = ffV \frac{vb + a - 2va}{(\mu + v - 2\mu v)(b - a)} = eeV \frac{(1 - \mu)(vb + a - 2va)}{(\mu + v - 2\mu v)(b - a)} = \frac{D}{2\sqrt{g(b - a)}}$$

Casu autem maximi effectus, quo $v = \frac{\mu b - \frac{1}{2}a}{b - 2a}$, reperietur:

$$ii = eeV \frac{b - \frac{1}{2}a}{2b - 2a}; \text{ ita ut sit } ii < ee.$$

72. Quoniam autem tubus EF est mobilis, Tab. V. huic aquae influxui mox se subduceret; cui incommodo, Fig. 1. ut medela afferatur, ingens tuborum EF numerus simul circa axem AC disponatur, ut superne in E superficiem aquae continuam constituent; supra quam vas immobile, seu aquae receptaculum, ita immineat, ut ex eo circum circa per tubos inclinatos aqua continuo infundatur. Ita enim tubi mobiles aquae copiam sufficientem jugiter accipient, idque sub debita inclinatione.

73. Hinc ergo eiusmodi machina nascetur, qua- Tab. V. lem figura 4^{ta} repraesentat. OHAC est axis verticalis, Fig. 4. circa quem vas conoidicum BBFF in gyrum agitur; hoc vas intra exteriorem superficiem cavitatem habet EEEE ad aquam recipiendam aptam, intus autem circa axem spatium vacuum relinquit. Circa oram au-

T t 2

tem

332 DE MOTU ET REACTIONE AQUAE

tem inferiorem plures habet tubulos F, F, F , e quibus aqua emittitur perpendiculariter ad respectiva plana verticalia ACF .

74. Supra hoc vas circa axem disponitur vas immobile $DDII$ locum receptaculi tenens, ex quo aqua continuo per tubos inclinatos Ii, Ii , in vas inferius influat, ut hoc modo vas inferius mobile iugiter plenum conservetur. GGG exhibet supremam aquae superficiem in hoc vase immobili, quod pariter circa axem OA spatium vacuum relinquit.

75. Statim ergo atque aqua ex vase inferiori per orificia f, f effluet, hoc vas ob vim reactionis in gyrum agetur, idque tanta vi, ut resistantiam quandam superare valeat. Quemadmodum igitur haec machina instructa esse debeat, ut maximum effectum praestet, ex ante allatis breviter repetamus.

76. Sit igitur tota aquae GG supra orificia f, f , altitudo $HC = b$, altitudo vasis inferioris mobilis $AC = a$, eius basis infimae semidiameter $CF = b$, superioris $AC = c$, vel potius c exprimat distantiam mediam ab axe inter oram limbi EE aquam continentis, exteriorum et interiorem. Huius autem totius limbi amplitudo sit $= ee$, et summa omnium orificiorum inferiorum f, f aquam efficientium $= ff$.

77. Praeterea sit D aquae copia, quae ex base superiori singulis minutis secundis in vas inferius effunditur, et g exprimat altitudinem, per quam graue vno minuto secundo delabitur. Tum vero hoc vas quoque minuto secundo circa axem absoluat m revolutiones. Deinde sit Fk momentum resistantiae, cui machina

china superandae par est, quae resistentia circa peculiarem axem mobilis conficiat m reuolutiones, singulis minutis secundis.

78. Sit Vv celeritas, qua aqua ex orificiis f, f , erumpit, et Vu celeritas, qua haec ipsa orificia circa axem AC gyantur. Deinde posuimus breuitatis gratia $\mu = 1 - \frac{f^4}{e^4}$ et $\nu = 1 - \frac{c^2}{b^2}$: haeque sunt quantitates, quae in calculum huius machinae ingrediuntur, quaeque, quemadmodum inter se determinantur, videamus.

79. Primum autem machinam in genere spectemus, seposito effectu maximo: tunc igitur sequentes determinationes locum habent:

$ff = eeV(1-\mu)$; $c = bV(1-\nu)$; $u = \frac{\mu b - a}{\mu + \nu - 2\mu\nu}$; $v = \frac{\nu b + a - 2\nu a}{\mu + \nu - 2\mu\nu}$
 $b = \frac{\sqrt{g(\mu b - a)}}{\pi m \sqrt{(\mu + \nu - 2\mu\nu)}}$; $ff = \frac{D\sqrt{(\mu + \nu - 2\mu\nu)}}{2\sqrt{g(\nu b + a - 2\nu a)}}$; et effectus machinae per hanc aequationem indicabitur:

$$\pi n F k = D \left(\frac{\sqrt{(\mu b - a)(\nu b + a - 2\nu a)} - \nu(\mu b - a)}{\mu + \nu - 2\mu\nu} \right)$$

80. Denique si summa omnium orificiorum i, i , per quae aqua ex receptaculo in vas inferius mobile infunditur, ponatur $= ii$, debet esse $ii = \frac{D}{2\sqrt{g(b-a)}}$; et tubi Ii ita debent esse inclinati ad horizontem, ut anguli inclinationis huius tangens sit $= \sqrt{\frac{(1-\mu)(\nu b + a - 2\nu a)}{(1-\nu)(\mu b - a)}}$. Quo plures autem fuerint huiusmodi tubi Ii , eo melius erit, quin etiam, si plane essent inter se contigui, optimum foret.

81. Ut iam effectus prodeat maximus, statui debet $\nu = \frac{\mu b - 2a}{b - 2a}$, eritque effectus $2\pi n F k = D b$. Tam vero habebitur $ee = \frac{ff}{\sqrt{(1-\mu)}}$; $c = \frac{b\sqrt{(1-\mu)b}}{\sqrt{(b-2a)}}$; $u = \frac{b-2a}{2(1-\mu)}$; $v =$

334 DE MOTU ET REACTIONE AQUAE

$$v = \frac{b-2a}{2(1-\mu)}; b = \frac{\sqrt{g(b-2a)}}{\pi m \sqrt{2(1-\mu)}}; c = \frac{\sqrt{gb}}{\pi m \sqrt{2}}; ff = \frac{D\sqrt{(1-\mu)}}{\sqrt{2g(b-2a)}}; ii = \frac{D}{2\sqrt{g(b-2a)}};$$

$$ee = \sqrt{2g(b-2a)}, \text{ et tangens inclinationis ad horizontem tubulorum } Ii = \sqrt{1 - \frac{2a}{b}}.$$

82. Cum altitudo vasis AC semissem totius altitudinis superare nequeat; tum etiam ipsi semissi æqualis esse nequit, nisi sit $\mu = 1$, et amplitudo EE quasi infinities maior, quam summa omnium orificiorum ff. Hoc autem casu $a = \frac{1}{2}b$, erit $u = v = \frac{bbb}{2cc}$; $c = \frac{\sqrt{gb}}{\pi m \sqrt{2}}$; $ff = \frac{Dc}{b\sqrt{2gb}} = \frac{D}{2\pi mb}$; $ii = \frac{D}{\sqrt{2gb}} = \frac{b}{c}ff$; et inclinatio tubulorum Ii ad horizontem evanescit. Quantitates ergo b et c arbitrio nostro relinqui videntur; sed quia ee prae ff est infinitum, etiam valor ipsius c infinitus fit necesse est, tum autem fit $m = \frac{\sqrt{gb}}{\pi c \sqrt{2}}$.

83. Quoniam supremi limbi EEE, qui omnia tuborum aquam deferentium orificia superiora continet, amplitudo prae c non admodum notabilis esse potest, propterea quod motus aquae in eo nimis esset inæqualis, quam ut cum motu affluentis aquae per tubos Ii convenire posset, sit 2γ latitudo huius limbi, seu $c - \gamma$ radius interioris circuli, et $c + \gamma$ exterioris, ita ut γ prae c sit quantitas valde parva, et amplitudo huius limbi erit $\pi(c + \gamma)^2 - \pi(c - \gamma)^2 = 4\pi c \gamma = ee$.

84. Hoc posito, si machina ad effectum maximum fit accommodata, quia habemus:

$$ee = \frac{D}{\sqrt{2g(b-2a)}} = 4\pi c \gamma \text{ et } c = \frac{\sqrt{gb}}{\pi m \sqrt{2}} \text{ seu, } m = \frac{\sqrt{gb}}{\pi c \sqrt{2}}$$

sumtis c et γ pro quantitativis cognitis, erit:

$$V(b-2a) = \frac{D}{4\pi c \gamma \sqrt{2g}}, \text{ ideoque } \frac{b}{c} = \frac{D}{4\pi \gamma \sqrt{2gb(1-\mu)}}$$

$$\text{et } u = v = \frac{D}{64(1-\mu)\pi c \gamma \sqrt{2g}} \text{ et } ff = 4\pi c \gamma \sqrt{1-\mu};$$

tum

tum vero $ii = \frac{D}{2\sqrt{g(b-a)}}$, et tangens inclinationis tuborum Ii ad horizontem $= \frac{D}{4\pi c\gamma\sqrt{2gb}}$, ac denique $n = \frac{D^2}{2\pi Fk}$.

85. Si praeter c et γ etiam intervallum $CF = b$ pro cognito assumere velimus, quoniam plerumque circumstantiae id non arbitrio nostro reliquant, habebimus:

$$V(1-\mu) = \frac{D}{4\pi b\gamma\sqrt{2gb}} \text{ et } u=v = \frac{bb b}{2cc c}.$$

At c et γ non penitus nostro arbitratui relinquuntur, cum $\frac{D}{4\pi c\gamma\sqrt{2g}}$ debeat esse $< \sqrt{b}$, seu $4\pi c\gamma > \frac{D}{\sqrt{2gb}}$. Si igitur capiatur $\gamma = \frac{1}{2}c$, debet esse $\frac{1}{2}\pi cc > \frac{D}{\sqrt{2gb}}$, unde sumto $\frac{1}{2}\pi cc = \frac{D}{\sqrt{2gb}}$, seu $cc = \frac{2D}{4\pi\sqrt{2gb}}$; erit $V(b-2a) = \frac{D}{\frac{1}{2}\pi cc\sqrt{2g}} = \frac{8}{9}\sqrt{b}$, seu $b-2a = \frac{64}{81}b$, indeque $a = \frac{17}{162}b$.

86. Quoniam sic altitudo a pro circumstantiis prodit nimis parva, statuatur $\frac{1}{2}\pi cc = \frac{2D}{\sqrt{2gb}}$, eritque $V(b-2a) = \frac{1}{2}\sqrt{b}$, seu $a = \frac{1}{8}b$, qui valor iam ad omnes casus satis erit accommodatus. Hinc igitur fit:

$$c = 2\sqrt{\frac{D}{\pi\sqrt{2gb}}}; \text{ et } \gamma = \frac{1}{2}c = \sqrt{\frac{D}{\pi\sqrt{2gb}}};$$

tum vero $V(1-\mu) = \frac{2D}{\pi bc\sqrt{2gb}} = \frac{c}{2\pi b}$, et

$$ff = \frac{c^2}{2b} = \frac{c}{2\pi b} \cdot ee; \quad u=v = \frac{bb b}{2cc c}; \quad m = \frac{\sqrt{gb}}{\pi c\sqrt{2}}$$

Porro $ii = \frac{D}{\sqrt{\frac{5}{2}gb}}$; et tangens inclinationis tuborum Ii

ad horizontem $= \frac{D}{\frac{1}{2}\pi cc\sqrt{2gb}} = \frac{1}{2}$, seu iste angulus 26° ,

$34'$; et $n = \frac{D^2}{2\pi Fk}$.

87. Hinc igitur quovis casu tota machina non difficulter definitur. Sit exempli causa altitudo lapsus

$$b = 10$$

336 DE MOTU ET REACTIONE AQUAE

$b = 10$ pedum, et quantitas aquae singulis minutis secundis affluens $D = 1$ pes cubicus: erit $a = 3\frac{3}{4}$ ped. $c = 0,26837$ ped. $\gamma = 0,03355$ ped. $ff = \frac{0,01933}{4b}$. Sumatur $b = c$; erit $ff = 0,00483$ ped. quadr. et $u = v = 5$ ped. $m = 10,484$, sicque motus machinae nimis foret velox.

88. Hoc ergo casu praestat quantitatem c ex numero m definire; cum enim non consultum sit, vno minuto secundo vna plures reuolutiones admittere, ponatur $m = 1$, hincque habebitur $c = \frac{\sqrt{gb}}{\pi\sqrt{2}} = 2,8135$, $\gamma = 0,3517$ ped. Deinde ob $\pi V_2 = \frac{\sqrt{gb}}{c}$ erit in genere $V(b-2a) = \frac{D}{\gamma\sqrt{gb}}$ hocque casu $b-2a = 0,000206$ ped. seu $a = 4,999807$ ped. Tum vero est $\frac{b}{c} = \frac{\sqrt{(b-2a)}}{\sqrt{b(1-\mu)}}$, et $ff = \frac{Dc}{b\sqrt{2gb}}$, quare si statuatur $b = c = 2,8135$, ut sit $u = v = 5$ ped. erit $ff = 0,0565$ ped. quadr. et $ii = 0,0565$ ped. quadr. et tangens inclinationis tuborum Ii ad horizontem $= \frac{\sqrt{(b-2a)}}{\sqrt{b}} = 0,00455$, seu hic angulus $= 0^\circ,16'$. ac numerus $n = \frac{10}{2\pi Fk}$.

89. Cum in statu maximi effectus sit $u = v$, celeritas aquae infra ex tubis effluentis, aequalis erit ipsi celeritati, qua orificia circa axem reuoluuntur: ex quo celeritas vera aquae effluentis erit nulla, ideoque verticaliter delabetur motu vniiformiter accelerato, quae insignis proprietas effectus maximi imprimis notari meretur.

90. Quando ergo datur copia aquae D singulis minutis secundis affluens, vna cum altitudine lapsus b ; constituatur primo numerus reuolutionum m , quas machina vno minuto secundo absolvere debet; is autem
ita

ita capiatur, vt quantitas $\frac{g b \sqrt{2} g b}{4 \pi m m}$ multis vicibus maior sit quam D. Sic enim proxime fiet $2 a = b$, seu $a = \frac{1}{2} b$. Tum sumatur $c = \frac{\sqrt{2} g b}{\pi m \sqrt{2}}$, et interuallum b pro lubitu accipiatur; quo facto erit $u = v = \frac{b b}{c c} \cdot \frac{1}{2} b$: et $ff = \frac{D c}{b \sqrt{2} g b}$ et $ii = \frac{D}{\sqrt{2} g b}$, ita vt sit $ff : ii = c : b$. Denique tubi Ii aquam tantum non horizontaliter eicere debebunt.

91. Cum autem aqua per tubos Ii secundum directionem horizontalem in vas inferius deriuare non licet, tubis his inclinationem quandam notabiliorem ad horizonem tribui oportet. Si igitur tangens huius inclinationis ponatur $= \theta$, posito $\gamma = \frac{1}{2} c$, statim reperitur $c = \sqrt{\frac{2 D}{\pi \theta \sqrt{2} g b}}$; hincque $m = \frac{\sqrt{2} g b}{2 \pi c}$. Tum vero, interuallo b pro lubitu assumpto, erit $u = v = \frac{b b b}{2 c c}$. Porro reperitur $a = \frac{1}{2} b (1 - \theta \theta)$, ac tandem:

$ff = \frac{D c}{b \sqrt{2} g b} = \frac{D}{2 \pi m b}$, et $ii = \frac{D}{\sqrt{2} g b (1 + \theta \theta)} = \frac{D}{2 \pi m c \sqrt{1 + \theta \theta}}$
His autem omnibus definitis habebitur:

$$2 \pi n F k = D b,$$

vnde constructio totius machinae est petenda.

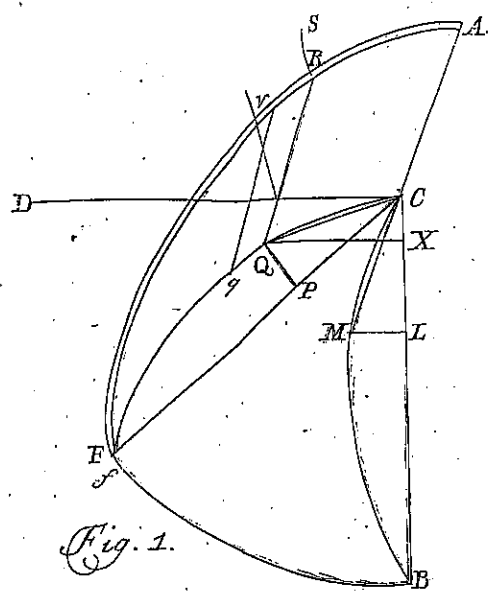


Fig. 1.

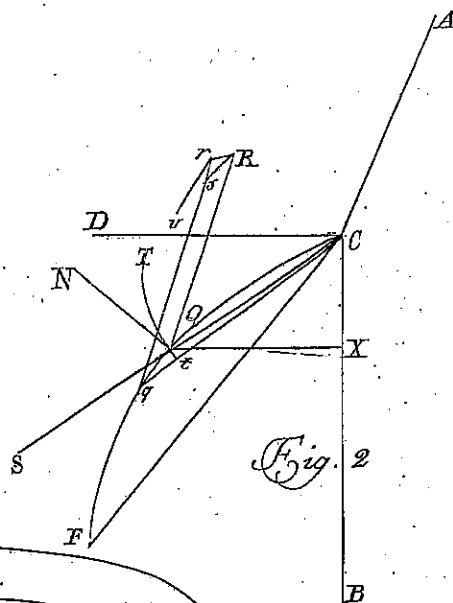


Fig. 2.

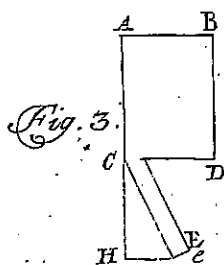


Fig. 3.

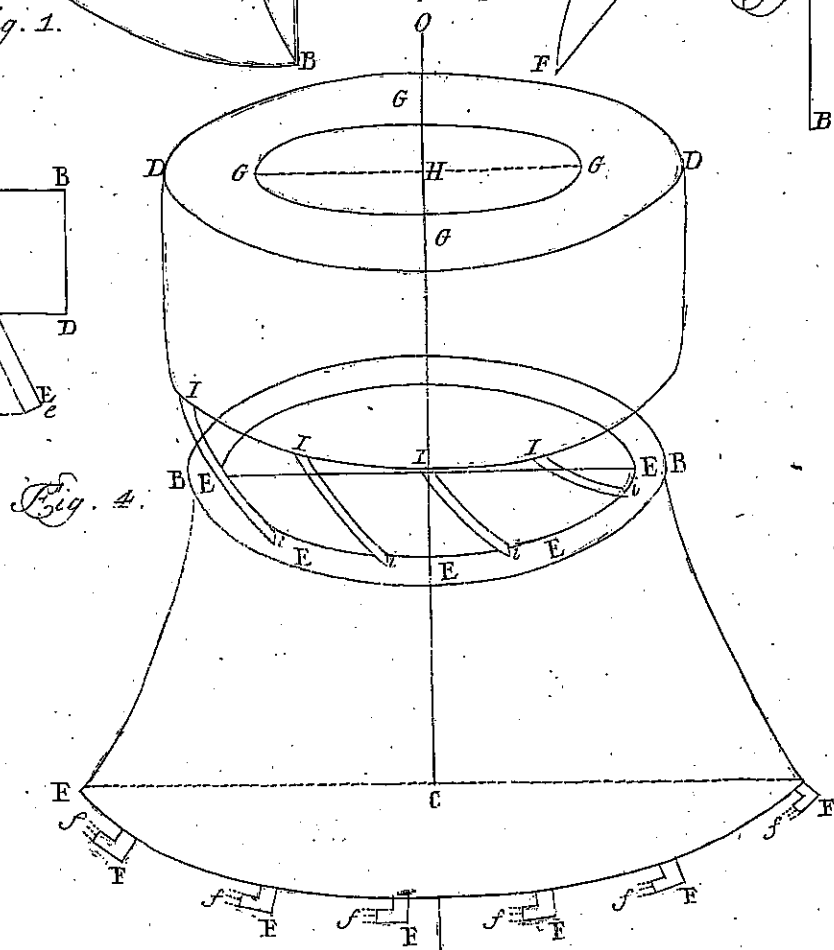


Fig. 4.